<u>Exercice 1</u>:

1. $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, 2y+z-t=0\right\} = \text{Vect}\left((1,0,0,0),(0,1,0,2),(0,0,1,1)\right)$.
   La famille $((1,0,0,0),(0,1,0,2),(0,0,1,1))$ est libre donc c'est une base de E. Ainsi, $\dim(E) = 3$.

2. $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 2y = 3z\right\} = \text{Vect}\left((6,3,2)\right)$. La famille $((6,3,2))$ est libre donc c'est une base de E. Ainsi, $\dim(E) = 1$.

3. $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = 0\} = \text{Vect}\left(X-1, X^2-1, X^3-1\right)$. La famille $\left(X-1, X^2-1, X^3-1\right)$ est de degré échelonné donc libre. C'est une base de E donc $\dim(E) = 3$.

4. $E = \text{Vect}(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}) = \text{Vect}(\{f_3, f_4\})$ car $f_1 \in \text{Vect}(f_3, f_4)$ et $f_2 \in \text{Vect}(f_3, f_4)$.
   La famille (f_3, f_4) est libre donc c'est une base de E donc $\dim(E) = 2$.

5. La famille associée est libre donc $\dim(E) = 3$.

<u>Exercice 2</u>:
L'équation caractéristique associée est $X^2 + 4X + 4 = 0$. $\Delta = 0$ donc -2 est solution double de cette équation.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n$ et $v_n = n(-2)^n$. La famille $((u_n),(v_n))$ est alors une base de E d'où $\dim(E) = 2$.

<u>Exercice 3</u>:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille de taille $n+1$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre pour prouver que c'est une base.
Or cette famille est une famille de polynômes échelonnés, donc elle est libre. D'où $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

<u>Exercice 4</u>:
Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soit $f \in E$, $\exists (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = A\cos(x+\varphi)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = A(\cos(x)\cos(\varphi) - \sin(x)\sin(\varphi)) = (A\cos(\varphi))\cos(x) + (-B\sin(\varphi))\sin(x)$.
Donc $f \in \text{Vect}(\cos, \sin)$. Par conséquent, $E \subset \text{Vect}(\cos, \sin)$.
Réciproquement, soit $f \in \text{Vect}(\cos, \sin)$, $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.
Si $\lambda = 0$, $f \in E$ $(A = \mu, \varphi = -\frac{\pi}{2})$ et sinon on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\left(\cos\left(x - \text{Arctan}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\right)\right)$.
Donc $f \in E$, d'où $\text{Vect}(\cos, \sin) \subset E$.
Conclusion : $E = \text{Vect}(\cos, \sin)$.
Or $(\cos, \sin)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc $(\cos, \sin)$ est une base de E. On en déduit que $\dim(E) = 2$.

Ou plus simplement E est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. Donc E est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(E) = 2$.

<u>Exercice 5</u>: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}\left((E_{i,j} + E_{j,i})_{i \leqslant j}\right)$ donc $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$.
$\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}\left((E_{i,j} - E_{j,i})_{i < j}\right)$ donc $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Notons $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}\left((E_{i,i})_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)$ donc $\dim(\mathscr{D}_n(\mathbb{K})) = n$

<u>Exercice 6</u>: On va utiliser la formule de Grassmann.

- $F + G$ est un sev de E donc $\dim(F+G) \leqslant \dim(E)$.
- $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G)$.
- Or, $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$ et $\dim(F+G) \leqslant \dim(E)$ donc $\dim(F \cap G) > 0$.

Ainsi, $F \cap G \neq \{0_E\}$ donc F et G ont au moins un vecteur en commun.

Exercice 7: $A = \text{Vect}\left((1,\ldots,1)\right)$ et $B = \text{Vect}\left((1,0,\ldots,-1),(0,1,\ldots,-1),\ldots,(0,\ldots,1,-1)\right)$ donc A et B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1 et $n-1$ respectivement. Soit $x \in A \cap B$.

- $x \in A$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda.(1,\ldots,1)$.
- $x \in B$ donc $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$. Donc $x = (0,\ldots,0)$.

Par conséquent, $A \cap B = \emptyset$. De plus, $\dim(A) + \dim(B) = n = \mathbb{R}^n$, d'après la caractérisation des supplémentaires en dimension finie, $A \oplus B = \mathbb{R}^n$.

On peut aussi raisonner par analyse-synthèse.
Soit $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Analyse : supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $y = (y_1,\ldots,y_n) \in B$ tels que $x = \lambda(1,\ldots,1) + y$. On a $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 0$ et

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \lambda \\ \vdots \\ x_n = y_n + \lambda \end{cases}$$

On additionne les n lignes du système et on obtient $\sum\limits_{k=1}^{n} x_i = \lambda.n$ donc $\lambda = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_i$.
On a alors $y = x - \sum\limits_{k=1}^{n} x_i(1,\ldots,1)$.
Synthèse : Posons $y = x - \sum\limits_{k=1}^{n} x_i(1,\ldots,1)$ et $\lambda = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_i$. On $y \in B$ et $x = \lambda(1,\ldots,1) + y$.
Conclusion : On a donc $\mathbb{R}^n = A \oplus B$.

Exercice 8:
On a $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + 3z = 0\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y - 3z\right\} = \{(y-3z,y,z),\ \text{avec } y,z \in \mathbb{R}\}$.
D'où $F = \text{Vect}\left((1,1,0),(-3,0,1)\right)$. On a directement que $G = \text{Vect}\left((1,-1,3)\right)$.
La famille $\left((1,1,0),(-3,0,1)\right)$ est une famille libre de F donc c'est une base de F.
De même, $\left((1,-1,3)\right)$ est une base de G.
Soit $u \in F \cap G$, donc $u \in G$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = ((\lambda,-\lambda,3\lambda))$.
Or $u \in F$, donc $\lambda + \lambda + 9\lambda = 0$, d'où $\lambda = 0$. On en déduit que $u = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $F \cap G = 0_{\mathbb{R}^3}$.
Par la caractérisation, $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
La famille $\left((1,1,0),(-3,0,1),(1,-1,3)\right)$ est une base adaptée de $F \oplus G$.

Exercice 9:

1. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + 3z = 0\right\} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = -y - 3z\right\}$.
   Donc $F = \{(-y-3z,y,z,t)$ avec $y,z,t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left((-1,1,0,0),(-3,0,1,0),(0,0,0,1)\right)$.
2. De plus, $\left((-1,1,0,0),(-3,0,1,0),(0,0,0,1)\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$, donc c'est une base de F. F est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3.
3. On peut montrer que la famille $\left((-1,1,0,0),(-3,0,1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,0)\right)$ est libre et donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.
   Donc, en posant $G = \text{Vect}\left((1,0,0,0)\right)$, on a que $F \oplus G = E$.

Exercice 10:

1. $F = \text{Vect}\big((X-1),(X+2)^2\big)$.
   $(X-1)$ et $(X+2)^2$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}_4[X]$, donc $\text{Vect}\big((X-1),(X+2)^2\big)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
   De plus, ces deux vecteurs forment une famille libre donc $\big((X-1),(X+2)^2\big)$ est une base de F. On en déduit que F est de dimension 2.

2. On sait que $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$. En complétant la famille libre $\big((X-1),(X+2)^2\big)$, on va créer une base de $\mathbb{R}_4[X]$ adaptée à F.
   Considérons la famille $((X-1),(X+2)^2, 1, X^3, X^4)$ qui est une famille de polynômes échelonnés donc cette famille est libre dans $\mathbb{R}_4[X]$. De plus, elle est de cardinal 5 qui est la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_4[X]$ (qui est de plus adaptée à F).
   On en déduit directement que $\text{Vect}(1, X^3, X^4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 11: On a $F = \text{Vect}\left((1,0,0,0),(1,2,0,0)\right)$ et $G = \text{Vect}\left((3,1,1,1),(4,4,1,1),(1,5,5,0)\right)$.
Ces familles qui génèrent F et G respectivement sont libres, elles forment donc des bases respectives de ces espaces.
On a $(1,0,0,0),(1,2,0,0),(1,5,5,0),(4,4,1,1) \in F+G$.
Or ces 4 vecteurs forment une famille libre (car échelonnée) d'où $\dim(F+G) \geqslant 4$.
Or $F+G \subset \mathbb{R}^4$, d'où $\dim(F+G) = 4$.
D'après la formule de Grassmann, $\dim(F \cap G) = 2+3-4 = 1$.
Or $(1,3,0,0) = (4,4,1,1)-(3,1,1,1) \in G$ et $(1,3,0,0) = \frac{3}{2}(1,2,0,0) - \frac{1}{2}(1,0,0,0) \in F$.
D'où $F \cap G = \text{Vect}\left((1,3,0,0)\right)$.

Exercice 12:

$$S = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ telles que } f'' - 2f' + f = 0 \text{ et } f'' + 3f' - 4f = 0\} = S_1 \cap S_2$$

où $S_1 = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ telles que } f'' - 2f' + f = 0\} = \text{Vect}(x \mapsto \mathbf{e}^x, x \mapsto x\mathbf{e}^x)$
et $S_2 = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ telles que } f'' + 3f' - 4f = 0\} = \text{Vect}(x \mapsto \mathbf{e}^x, x \mapsto \mathbf{e}^{-4x})$
Donc S est un espace vectoriel de dimension finie.
D'après la formule de Grassmann, on sait que $\dim(S) = \dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 + S_2)$.
Or $S_1 + S_2 = \text{Vect}(x \mapsto \mathbf{e}^x, x \mapsto x\mathbf{e}^x, x \mapsto \mathbf{e}^{-4x})$. De plus, on montre aisément que $(x \mapsto \mathbf{e}^x, x \mapsto x\mathbf{e}^x, x \mapsto \mathbf{e}^{-4x})$ est une famille libre, on en déduit que $\dim(S_1+S_2) = 3$.
Conclusion : $\dim(S) = 2+2-3 = 1$ donc S est une droite vectorielle. De plus, $S = \text{Vect}(x \mapsto \mathbf{e}^x)$.

Exercice 13:

1. On utilise encore la formule de Grassmann : $\dim(H \cap H') = \dim(H) + \dim(H') - \dim(H+H')$.
   On a $H \subset H+H' \subset E$. Donc, $\dim(H+H') = n-1$ ou n.
   Par l'absurde, si $\dim(H+H') = n-1$ alors $H = H+H'$ et $H' = H+H'$ donc $H = H'$ ce qui est absurde car les hyperplans sont distincts. Donc $\dim(H+H') = n$.
   Par la formule de Grassmann, $\dim(H \cap H') = \dim(H) + \dim(H') - \dim(H+H') = 2(n-1) - n = n-2$.

2. (a) Ils sont de dimension 1.
   (b) On va raisonner par l'absurde. Supposons que $\forall u \in H,\ u \in H'$.
   On a donc $H \subset H'$. Or, ils ont la même dimension donc $H = H'$ Absurde. Donc il existe $u \in H$, tel que $u \notin H'$. On fait de même pour montrer qu'il existe $v \in H'$, tel que $v \notin H$.
   (c) Supposons que $w = u + v \in H \cup H'$.
   - Si $w \in H$ alors $u+v-u = v \in H$. Absurde.
   - Si $w \in H'$ alors $u+v-v = u \in H'$. Absurde.

   Donc, $w \notin H \cup H'$.
   (d) Posons $G = \text{Vect}(w)$. On va montrer que c'est un supplémentaire commun à H et à H'.
   - Soit $x \in H \cap G$. $x \in G$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda.w$.
     Si $\lambda \neq 0$, on a alors $w = \frac{1}{\lambda}.x \in H$. Absurde donc $\lambda = 0$ donc $x = 0$.
   - On montre de la même façon que $G \cap H' = \{0_E\}$.
   - Enfin, $\dim(H)+\dim(G) = \dim(E)$ donc on retrouve 2 des 3 points de la caractérisation des supplémentaires en dimension finie. Donc, $E = G \oplus H$.
   - De même, $E = G \oplus H'$.

Exercice 14:

1. Cette famille contient 4 vecteurs dans un espace de dimension 3 donc elle n'est pas libre donc $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) \leqslant 3$.

   (a) La famille (x_1, x_2) est libre donc $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) \geqslant 2$.

   (b) $x_3 = 5x_1 + 2x_2$ et $x_4 \notin \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$ donc $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_4)$.

   Donc, $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. La famille (x_1, x_2) est libre et $x_3 = x_1 + x_2$ et $x_4 = x_2 - x_1$.
   Donc $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$. Donc, $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2$.

3. La famille (P_2, P_3, P_4) est de degré échelonné donc libre.
   $P_1 \notin \mathrm{Vect}(P_2, P_3, P_4)$ donc (P_1, P_2, P_3, P_4) est libre. Donc $\mathrm{rg}(P_1, P_2, P_3, P_4) = 4$. C'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 15: Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{]-1\,;1[}$, on considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$.
   En évaluant en 0, on obtient $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.
   En évaluant en $\frac{1}{2}$, on obtient $\lambda_1\sqrt{3} + \lambda_2\frac{1}{\sqrt{3}} = 0$.
   Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. (f_1, f_2) est libre.

2. On sait déjà que $\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3) \in \{2; 3\}$. On remarque que $f_1 + f_2 = \frac{1+x^2+1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 2f_3$. Donc $f_3 \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.
   D'où $\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3) = 2$.

Exercice 16: Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $f_k : t \longmapsto \cos(kt)$.

1. Soit $k, p \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^{2\pi} f_k(t)\, f_p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k+p)t) + \cos((k-p)t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq p \\ 2\pi \text{ si } k = p = 0 \\ \pi \text{ sinon.} \end{cases}$$

2. Soit $(\lambda_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ une famille de réels telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$.

   Soit i un indice quelconque. En multipliant chaque membre par f_i puis en intégrant, on trouve à l'aide de la question précédente, $\lambda_i = 0$. La famille des $(f_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est donc libre pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est donc de dimension infinie.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $g_k : t \longmapsto \cos^k(t)$.
   Grâce à la linéarisation des fonctions circulaires, $g_k \in \mathrm{Vect}(f_0, \cdots, f_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   D'où $\mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n) \supset \mathrm{Vect}(g_0, \ldots, g_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Grâce au développement des fonctions circulaires, $f_k \in \mathrm{Vect}(g_0, \cdots, g_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   D'où $\mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_m) \subset \mathrm{Vect}(g_0, \ldots, g_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Conclusion : $\mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n) = \mathrm{Vect}(g_0, \ldots, g_n)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

4. D'où $\mathrm{rg}\left((g_k)_{k \in [\![0,n]\!]}\right) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. On en déduit que la famille $\left((g_k)_{k \in [\![0,n]\!]}\right)$ est libre.